文章编号:1000-4939(2023)04-0848-07

圆柱约束下细长压杆屈曲及后屈曲行为

蒋娜,杜长城,孙强强

(西南石油大学机电工程学院,610500 成都)

摘　要:研究了轴向力作用下受圆柱横向约束的弹性杆的屈曲和后屈曲行为。通过有限元模拟,分析了细长压杆发生正弦和螺旋屈曲的轴向临界力,提出了正弦和螺旋屈曲临界点判定方法,且与文献结果比较验证了分析的正确性。同时考察了长细比和边界条件等因素对临界力的影响。结果表明正弦屈曲临界力和螺旋屈曲临界力随杆的长细比减小而增大。杆在一定长度范围内,端部约束条件对临界屈曲载荷及模态的影响不可忽略;当杆的长度足够长时,可以忽略边界条件对临界载荷的影响。

关键词:圆柱约束屈曲;后屈曲;有限元分析;边界条件

中图分类号:O343.3;O343.9　　**文献标志码:**A　**DOI:**10.11776/j.issn.1000-4939.2023.04.014

Buckling and post buckling behavior of slender compression rod under cylindrical restraint

JIANG Na,DU Changcheng,SUN Qiangqiang

(School of Mechanical Engineering,Southwest Petroleum University,610500 Chengdu,China)

Abstract: The buckling and post-buckling behaviors of an elastic rod subjected to both axial force and transverse cylindrical constraints are studied. The axial critical forces of sinusoidal buckling and spiral buckling of slender rod are analyzed by finite element simulation, and the discrimination method for critical point of sinusoidal and spiral buckling is proposed, which is verified by comparison with literature results. The influence of slenderness ratio and boundary conditions on the critical force is also investigated. The results show that the critical forces of sinusoidal buckling and spiral buckling increase with the decrease of the slenderness ratio of the rod. In a certain range of rod length, the influence of end constraint conditions on critical load and buckling mode is not negligible. While the influence of boundary conditions on the critical load can be ignored as the length of the rod is long enough.

Key words:cylindrical constrained buckling;post buckling;finite element analysis;boundary condition

---

收稿日期:2021-06-13　　　**修回日期:**2022-07-01

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 11602208;51674216;11702230);四川省科技计划资助项目(No. 2019JDTD0017);西南石油大学青年科技创新团队资助项目(No. 2018CXTD07)

通信作者:杜长城。E-mail:ducc1982@163.com

引用格式:蒋娜,杜长城,孙强强. 圆柱约束下细长压杆屈曲及后屈曲行为[J]. 应用力学学报,2023,40(4):848-854.

JIANG Na,DU Changcheng,SUN Qiangqiang. Buckling and post buckling behavior of slender compression rod under cylindrical restraint[J]. Chinese journal of applied mechanics,2023,40(4):848-854.

横向圆柱约束下的弹性杆在工程应用中普遍存在,如石油钻井工程和连续油管技术中用千米长的油管插入井筒[1-2]、用于支架植入手术进入动脉血管中的导丝[3]、电子器件制造中限制在狭窄通道内的纳米杆[4]以及植物根系在土壤中的生长[5]等。横向约束会显著增加杆的轴向受压承载能力[6],同时导致压杆发生二次屈曲出现空间屈曲构型,且此时压杆的屈曲行为受到多种因素调控。因此圆柱约束下的压杆稳定性问题一直受到国内外学者的持续关注。

LUBINSKI[7]首次提出井筒中细长杆的屈曲问题,并导出了其临界屈曲载荷的近似解。DAWSON[8]研究了斜井筒中受约束杆的正弦屈曲和螺旋屈曲,得出的屈曲临界载荷公式得到了较广泛的应用,但公式中系数的取值仍存在争议。后续研究人员分别用微分方程法、梁柱模型和能量法等推导了临界屈曲载荷[9-10]。MILLER 等[11]给出了水平圆柱内细长杆受压的实验和数值研究结果。近几年,LIU 等[12]通过理论分析、数值模拟和实验测量研究,提出了一种新的理论模型来分析约束杆的正弦和螺旋屈曲过程。XIAO 等[13]研究了无摩擦圆柱约束条件下轴向压缩细长弹性梁的三维屈曲和后屈曲过程,通过理论分析和数值模拟得到各构型之间过渡点处的临界轴向位移。特征值分析不能考虑大变形的影响,屈曲试验又往往受到设备精度和试样尺寸的影响;而采用有限元法进行大变形分析可以更准确的预测临界屈曲载荷,且能更直观的显示杆的力学行为[14]。黄文君等[15]提出了一种新的边界条件分类方法,并证明了第二类情况下,边界条件对长管柱的全螺旋屈曲截面也有影响。

本研究采用有限元法分析了圆柱约束下细长压杆在不同边界条件下的屈曲和后屈曲特性。基于梁单元对圆柱约束下的细长压杆进行建模,同时考虑压杆变形时的大位移和接触非线性,采用弧长法进行平衡位移路径搜索,考察了轴向载荷、长细比和边界条件与屈曲和后屈曲的关系。

1　力学模型

1.1　理论分析

忽略重力影响,考虑受轴向力的细长空心杆和刚性圆柱约束,模型如图 1 所示(图中虚圆环为杆发生屈曲后的位置)。设杆长度为 L,横截面面积为 A,抗弯刚度为 EI,圆柱约束的直径为 D,杆上端轴向载荷为 F_h,杆下端的轴向反力为 F_e。杆发生屈曲后横截面中心的角位移为 θ,杆和圆柱约束中心距离为 r(其最大值为杆与约束面的间隙距离 δ),杆截面中心在 x、y、z 方向的位移分别为 u_1、u_2、u_3。

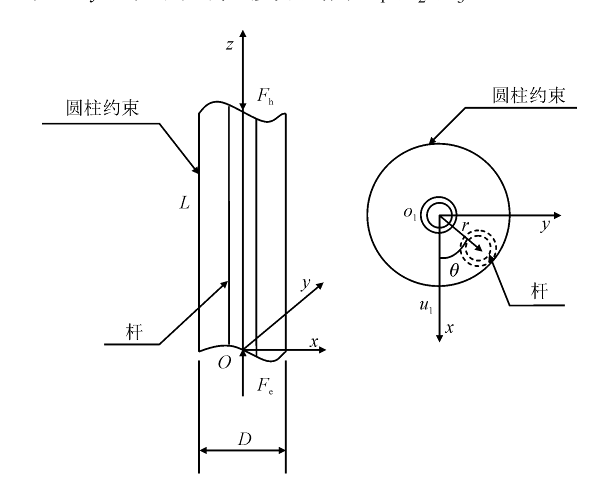


图 1　杆和圆柱约束模型图

Fig. 1　Rod and cylinder constraint model diagram

用两节点梁单元对杆进行有限元建模,每个单元中每个节点有 6 个自由度,如图 2 所示。

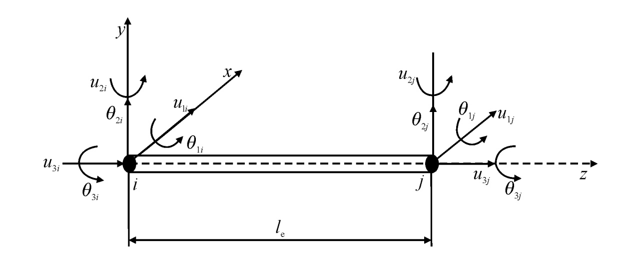


图 2　有限元分析单元示意图

Fig. 2　Schematic diagram of finite element analysis element

单元的总势能为

$$\Pi^e = U - \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{h}}^{e} = \int_{V_e}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}V + \int_{V_e}\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}\mathrm{d}V - \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{h}}^{e} \tag{1}$$

其中,U 为杆单元变形能。

节点位移向量为[16]

$$\boldsymbol{u}^e = [u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \theta_{1i}, \theta_{2i}, \theta_{3i}, u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, \theta_{1j}, \theta_{2j}, \theta_{3j}]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

杆屈曲变形后,其单元内的位移量 $\boldsymbol{u}$ 表示为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{u}^e \tag{3}$$

其中,$\boldsymbol{N}$ 表示单元形函数[16]。考虑节点的大位移,由横向位移 u_1、u_2 产生的轴向压缩不可忽略,单元几何方程可表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{bx} \\ \varepsilon_{by} \\ \varepsilon_z \\ \gamma_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -x\dfrac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}z^2} \\ -y\dfrac{\mathrm{d}^2 u_2}{\mathrm{d}z^2} \\ \dfrac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}z} + \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}z}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}z}\right)^2\right] \\ \rho\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \tag{4}$$

式中：ε_{bx} 是绕 xz 面内弯曲的线应变；ε_{by} 是 yz 面内弯曲的线应变；ε_z 是轴向应变；γ_z 是扭转剪应变；φ 为扭转角；$\boldsymbol{\varepsilon}_1$、$\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 分别为应变的线性部分和非线性部分。单元内应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 可表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\boldsymbol{B}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_2\right)\boldsymbol{u}^e \tag{5}$$

其中，$\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_2$ 为几何函数矩阵的线性部分和非线性部分。单元的物理方程为

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6}$$

式中，$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E},\boldsymbol{E},\boldsymbol{G})$ 为弹性矩阵[17]。将式(2)、(5)、(6)代入式(1)，整理得到以节点自由度表示的单元泛函 Π^e。

杆与圆柱约束的接触判定及算法：当杆的横向位移量 $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = r > \delta$ 时，杆在 xy 横向与圆柱约束面产生接触，在有限元分析中忽略杆与接触面的摩擦，采用罚函数法进行接触计算。在势能泛函中增加一个惩罚势能[17]

$$\Pi_{\mathrm{P}}^e = \frac{1}{2}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{\mathrm{P}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{u}) \tag{7}$$

其中：$\boldsymbol{E}_{\mathrm{P}}$是惩罚因子；$\boldsymbol{P}$ 为嵌入深度。将接触问题等价于无约束优化问题

$$\min\Pi^*(\boldsymbol{u}) = \Pi^e(\boldsymbol{u}) + \Pi_{\mathrm{P}}^e(\boldsymbol{u}) \tag{8}$$

将单元节点位移向量 $\boldsymbol{u}^e$ 中的元素依次表示为 $\boldsymbol{u}_i^e(i = 1,\cdots,8)$，则单元的节点力为

$$\boldsymbol{F}_i^e = \frac{\partial\Pi^*}{\partial\boldsymbol{u}_i^e}, i = 1,\cdots,8 \tag{9}$$

由此可以组集结构的节点力向量从而得到结构的平衡方程组

$$\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{u}) = 0, i = 1,2,3,\cdots,2n \tag{10}$$

其中：$\boldsymbol{u}$ 为结构屈曲位移向量；n 为节点总数。

计算中的一个难点在于必须同时实现对后屈曲平衡位移路径的搜索并保证大位移及接触非线性计算的收敛性和精度。本研究采用弧长控制的 Newton-Raphson 迭代法对非线性结构方程组进行计算。其中弧长法能够实现对后屈曲位移路径的搜索，而迭代法能够保证非线性方程的求解精度。

1.2 加载方式

边界条件为两端固定边界条件，杆和约束的轴线对齐。加载过程分为 3 个静力学结构分析工况。为了减小载荷对杆的冲击力，在载荷-时间历程中采用正弦波加载方式，如图 3。轴向力、扰动力随时间的函数表达式为

$$F_{\mathrm{h}}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < 1 \\ F_{\mathrm{h}} \cdot \left[\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t - \pi\right) + 0.5\right], & 1 \leqslant t < 3 \\ F_{\mathrm{h}}, & 3 \leqslant t \leqslant 4 \end{cases} \tag{11}$$

$$f_0(t) = \begin{cases} f_0 \cdot \sin\dfrac{\pi}{2}t, & 0 \leqslant t < 2 \\ 0, & 2 \leqslant t \leqslant 4 \end{cases} \tag{12}$$

在杆中部施加随机扰动力 f_0，扰动力的施加时间、位置、大小和方向对结果几乎没有影响[11]。

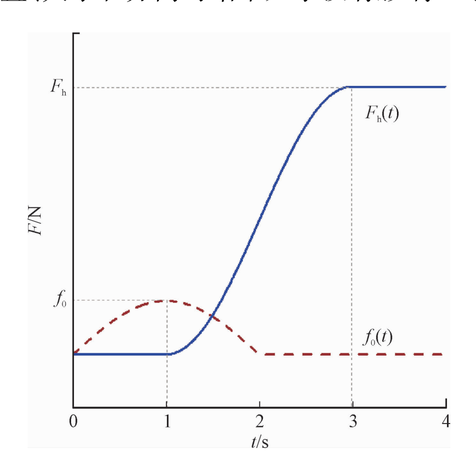


图 3 F_{h}、f_0 加载方式示意图

Fig. 3 Loading mode of F_{h}, f_0

2 屈曲结果分析

2.1 计算参数

设压杆内径 $r_1 = 2$ mm，外径 $r_2 = 3$ mm，长度 $L = 3.5$ m，弹性模量 $E = 210$ GPa，泊松比 $\mu = 0.3$，采用梁单元对压杆进行离散，单元数量 3 500，单元长度

1 mm;采用线性离散刚性单元对圆柱约束进行建模,圆柱约束直径 $D=20$ mm,长度 $L=3.5$ m。

2.2　轴向力 F_h 与杆屈曲关系

在轴向压力作用下,杆会经历 3 种平衡构型:稳定的直线、二维正弦形和三维螺旋形。如图 4 是杆端部位移 ΔL 与轴向载荷 F_h 的关系。

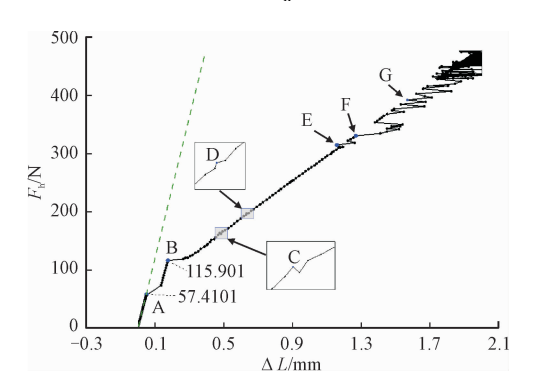


图 4　端部位移 ΔL 与轴向载荷 F_h 的关系

Fig. 4　Side displacement ΔL relations with axial load F_h

由图 4 可以看出,杆屈曲的 3 个阶段分别为 OA、AB 和 BG 段,且判断临界点的方法分别是位移控制的载荷降或载荷控制的位移水平阶跃,以下是对 3 个阶段的具体分析。

第一阶段:图中 OA 段杆发生弹性变形,绿色虚线斜率表示杆的纵向抗压刚度(EA/L)。

第二阶段:临界点 A 处曲线斜率出现突跳,即杆的纵向抗压刚度突然减小,杆在二维平面内发生屈曲失稳,杆端部位移 ΔL 增加速度变快,直到杆与圆柱约束发生接触,此时杆屈曲构型在 xz 平面为正弦形,如图 5(a)。从初始直线形到二维正弦形的过渡符合经典屈曲准则[18],即欧拉公式所给屈曲临界压力 $F_{cr}^{s}=4\pi^2EI/L^2$。在 AB 段中,杆处于正弦后屈曲阶段。

第三阶段:B 点轴向载荷 F_h 保持不变且位移出现阶跃,杆发生螺旋屈曲,且 B 点为第一个螺旋出现点。B 点的螺旋屈曲临界力 $F_{cr}^{c}=115.9$ N,与文献[13,19]中二维到三维过渡时的临界力吻合较好,文献[13]中 $F_{cr}^{c}=8.18\pi^2EI/L^2=120.65$ N,本研究结果比文献小了 3.94%,表明了本研究仿真模型的正确性,误差的主要原因为理论分析中采用连续接触假设和大变形模型与小变形假设模型之间的误差。随着 F_h 的增加,载荷位移曲线出现类似现象,如 C-G 点等,杆的屈曲螺旋波形持续增加。图 5(b)、(c)给出了杆屈曲构型在 B、G 点时 3 个面的投影。

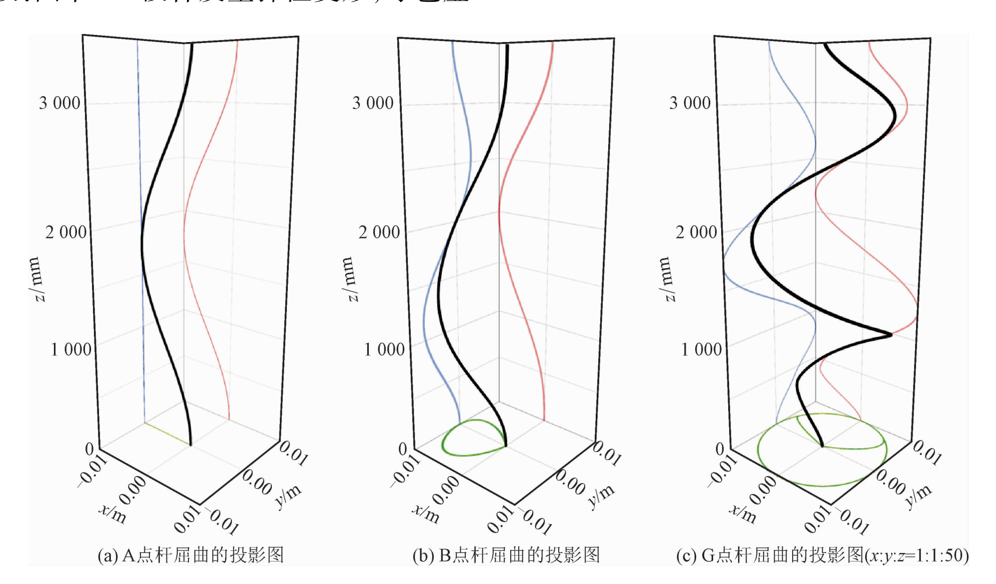


图 5　杆屈曲的投影图(x∶y∶$z=1$∶1∶50)

Fig. 5　Projection of rod buckling (x∶y∶$z=1$∶1∶50)

图 6 为 4 个典型点杆的正弦螺旋屈曲三维构型,图中放大了挠度来更清楚的显示螺旋形态,其 x∶y∶$z=1$∶1∶50。可以看出杆开始正弦失稳时,与约束接触的第一点在约束中点处,然后由点接触变为线接触,接着发生螺旋屈曲,且忽略重力的弹性杆屈曲形状始终是对称的。

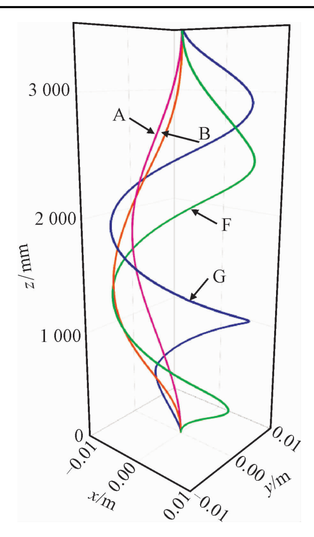


图 6 杆的三维屈曲构型(x∶y∶z=1∶1∶50)

Fig. 6 3D buckling configuration of rod(x∶y∶z=1∶1∶50)

2.3 长度 L 的影响

图 7 表示了杆长与屈曲临界力的关系。理论值与仿真值的误差计算公式为

$$\delta_{\mathrm{err1}} = \left| \frac{F_{\mathrm{cr}}^{\mathrm{s}} - F_{\mathrm{cr}}^{\mathrm{s}}(e)}{F_{\mathrm{cr}}^{\mathrm{s}}} \right| \times 100\% \tag{13}$$

$$\delta_{\mathrm{err2}} = \left| \frac{F_{\mathrm{cr}}^{\mathrm{c}} - F_{\mathrm{cr}}^{\mathrm{c}}(e)}{F_{\mathrm{cr}}^{\mathrm{c}}} \right| \times 100\% \tag{14}$$

其中：δ_{err1} 和 δ_{err2} 分别表示正弦屈曲和螺旋屈曲的误差；$F_{\mathrm{cr}}^{\mathrm{s}}$、$F_{\mathrm{cr}}^{\mathrm{c}}$ 分别为正弦和螺旋屈曲临界力理论值，正弦屈曲临界力为 $F_{\mathrm{cr}}^{\mathrm{s}} = 4\pi^2 EI/L^2$，螺旋屈曲临界力为 $F_{\mathrm{cr}}^{\mathrm{c}} = 8.18\pi^2 EI/L^2$；$F_{\mathrm{cr}}^{\mathrm{s}}(e)$、$F_{\mathrm{cr}}^{\mathrm{c}}(e)$ 分别为正弦和螺旋临界力仿真值。

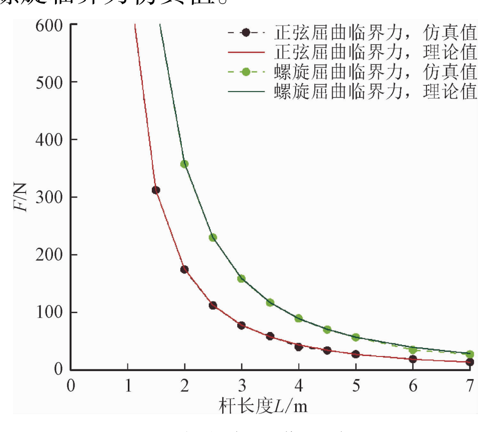


图 7 杆长与屈曲临界力的关系

Fig. 7 Relationship between rod length and buckling

图 7 中理论与仿真值误差均小于 8.43%，两者吻合较好，由此也验证了模型的正确性。图 7 显示临界力随杆长增加而减小，两组曲线随着杆长度的增加越接近，即正弦屈曲临界力与螺旋屈曲临界力差值变小，说明螺旋屈曲随着杆长的增加更易发生。在工程应用中，为了增加稳定性，应选用长度较小的杆或在长杆中间增加稳定器以减小相对杆长。

2.4 边界条件的影响

本研究取 12 组典型长度杆来研究边界条件对杆屈曲和后屈曲的影响，图 8、9 分别表示 3 种边界条件下的正弦屈曲临界力和螺旋屈曲临界力。图中实线表示的理论值和虚线表示的仿真值吻合较好，误差均小于 8.64%。

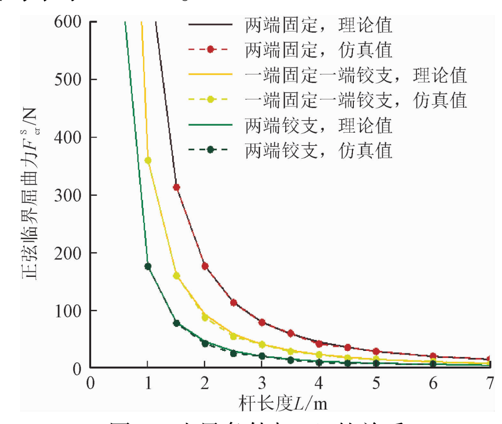


图 8 边界条件与 $F_{\mathrm{cr}}^{\mathrm{s}}$ 的关系

Fig. 8 Relationship between $F_{\mathrm{cr}}^{\mathrm{s}}$ and boundary conditions

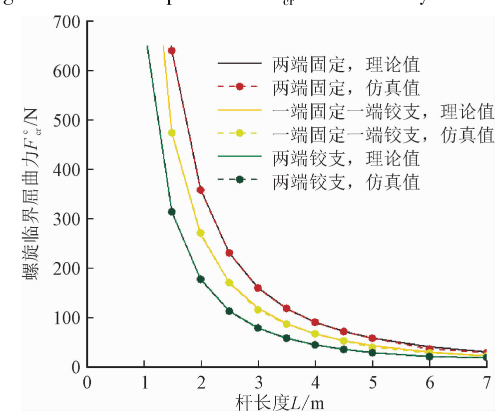


图 9 边界条件与 $F_{\mathrm{cr}}^{\mathrm{c}}$ 的关系

Fig. 9 Relationship between $F_{\mathrm{cr}}^{\mathrm{c}}$ and boundary conditions

如图 10 表示了相同长度杆在 F_{h} =70 N 时不同边界条件下的屈曲形态。明显两端铰支的情况下，杆在 yz 平面投影为三个波形，而两端固支条件下杆在 yz 平面投影为一个波形。相同长度杆中两端固支最稳定，临界屈曲力最大，两端铰支情况下的屈曲临界力最小。在长细比较小的杆的应用中，使用两端固支可以增加杆的稳定性。图 8、9 中曲线呈下降趋势，当 L 接近零时，$F_{\mathrm{cr}}^{\mathrm{c}}$ 和 $F_{\mathrm{cr}}^{\mathrm{s}}$ 趋近于无穷大。当 L 接近无穷大时，临界载荷 $F_{\mathrm{cr}}^{\mathrm{s}}$ 和 $F_{\mathrm{cr}}^{\mathrm{c}}$ 趋近于 0。

图 11、12 表示杆长和不同边界条件下屈曲临界力差异率的关系。差异率的计算公式为

$$\delta = \left|\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\Delta_1}\right| \times 100\% \tag{15}$$

其中，Δ_1、Δ_2为同长度不同边界条件下 F_{cr} 的差值。图 11、12 中 A 和 B 点分别为正弦屈曲临界力和螺旋屈曲临界力差异率 10% 的临界点，A、B 点所对应的 L 取较小值，即当杆长 L 大于 3.1 m 时，可以忽略两端边界条件对临界力的影响。当杆长达到 4.5 m 时，达到工程近似 5% 差异率，如图 11 点 C 所示。

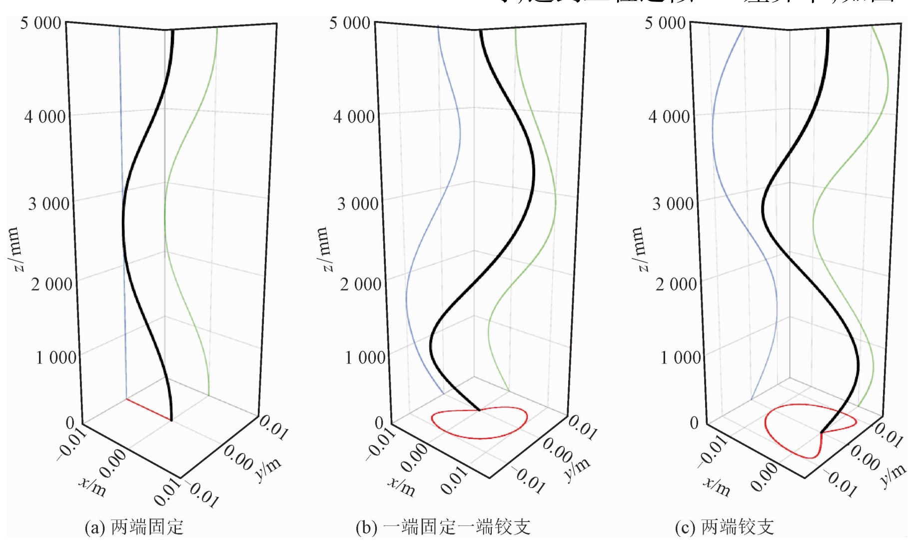


图 10 不同边界下杆屈曲模型(x∶y∶z = 1∶1∶50)

Fig. 10 The rod buckling model of different boundaries(x∶y∶z = 1∶1∶50)

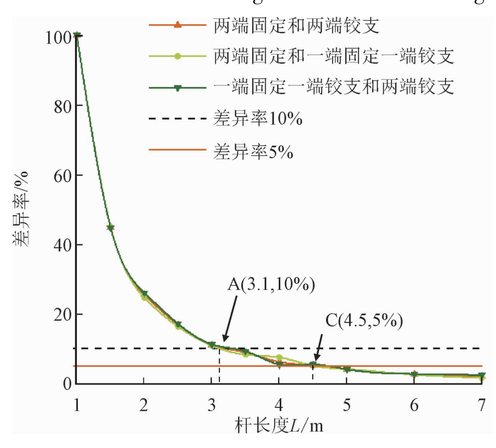


图 11 F^{s}_{cr} 与差异率的关系

Fig. 11 Relationship between F^{s}_{cr} and difference rate

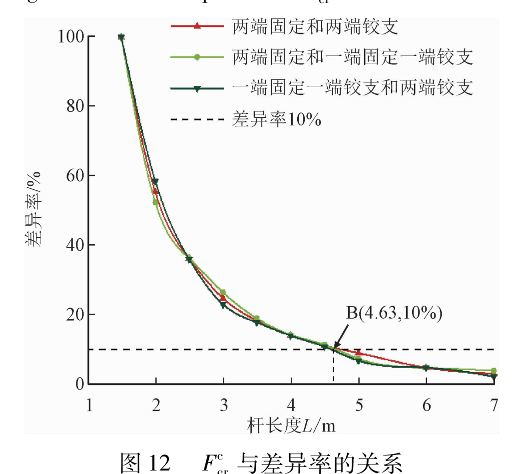


图 12 F^{c}_{cr} 与差异率的关系

Fig. 12 Relationship between F^{c}_{cr} and difference rate

3 结 论

本研究采用有限元仿真方法，分析了圆柱约束下细长压杆在不同边界条件下的屈曲和后屈曲特性，给出了屈曲临界点判定方法。考察了多种因素对屈曲和后屈曲的影响，具体结论如下。

1）轴向力作用下的圆柱约束杆会经历 3 种平衡构形：直线构形、二维正弦构形和三维螺旋构形，判断各构形临界点的方法为位移控制的载荷降或载荷控制的位移水平阶跃。

2）圆柱约束下的压杆长细比越小，正弦屈曲临界力和螺旋屈曲临界力越大。压杆长度相对较短时，端部边界约束条件不同，临界屈曲载荷及模态不同，边界条件的影响不可忽略。当压杆长细比足够大时，边界条件对临界载荷的影响小于 10%，可以忽略边界条件的影响。

3）采用平衡路径搜索的弧长法进行屈曲分析，可以较为准确地得到圆柱约束压杆在轴向力作用下的屈曲和后屈曲构形，计算结果与理论值及文献结果相比都具有很好的一致性。

参考文献：

[1] MILLER J T，SU T，DUSSAN V E B，et al. Buckling-induced lock-up of a slender rod injected into a horizontal cylinder[J]. Interna-

tional journal of solids and structures,2015,72:153-164.

[2] MITCHELL R F. New buckling solutions for extended reach wells [C]//IADC/SPE Drilling Conference. Richardson, Texas, USA: OnePetro,2002:SPE-74566-MS.

[3] SCHNEIDER P A . Endovascular skills: Guidewire and catheter skills for endovascular surgery, second edition[M]. Informa healthcare,2003.

[4] RYU S Y,XIAO J L,PARK W I,et al. Lateral buckling mechanics in silicon nanowires on elastomeric substrates[J]. Nano letters, 2009,9(9):3214-3219.

[5] SILVERBERG J L,NOAR R D,PACKER M S,et al. 3D imaging and mechanical modeling of helical buckling in *Medicago truncatula* plant roots[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences,2012,109(42):16794-16799.

[6] CHATEAU X,NGUYEN Q S. Buckling of elastic structures in unilateral contact with or without friction[J]. European journal of mechanics - a/solids,1991,10:71-89.

[7] LUBINSKI A. A study of the buckling of rotary drilling strings[J]. Drilling & production practice,1950:178-214.

[8] DAWSON R. Drill pipe buckling in inclined holes[J]. Journal of petroleum technology,1984,36(10):1734-1738.

[9] GAO D L,HUANG W J. A review of down-hole tubular string buckling in well engineering[J]. Petroleum science,2015,12(3): 443-457.

[10] CUNHA J C. Buckling of tubulars inside wellbores:a review on recent theoretical and experimental works[J]. SPE drilling & completion,2004,19(1):13-19.

[11] MILLER J T,SU T,PABON J,et al. Buckling of a thin elastic rod inside a horizontal cylindrical constraint[J]. Extreme mechanics letters,2015,3:36-44.

[12] LIU J P,ZHONG X Y,CHENG Z B,et al. Post-buckling analysis of a rod confined in a cylindrical tube[J]. Journal of applied mechanics,2018,85(7):071001.

[13] XIAO J F,CHEN Y L,LU X,et al. Three dimensional buckling beam under cylindrical constraint[J]. International journal of mechanical sciences,2019,150:348-355.

[14] HAJIANMALEKI M,DAILY J S. Critical-buckling-load assessment of drillstrings in different wellbores by use of the explicit finite-element method[J]. SPE drilling & completion,2014,29(2): 256-264.

[15] HUANG W J,GAO D L,LIU F W. Buckling analysis of tubular strings in horizontal wells[J]. SPE journal,2015,20(2): 405-416.

[16] 刘巨保,岳欠杯. 石油钻采管柱力学[M]. 北京:石油工业出版社,2011.

[17] 孙林松,王德信,谢能刚. 接触问题有限元分析方法综述[J]. 水利水电科技进展,2001,21(3):18-20.
SUN Linsong,WANG Dexin,XIE Nenggang. A summary of finite element analysis for contact problems[J]. Advances in science and technology of water resources,2001,21(3):18-20(in Chinese).

[18] TIMOSHENKO S P,GERE J M. Theory of elastic stability[M]. 2nd ed. Mineola:Dover Publications,2009.

[19] FANG J,LI S Y,CHEN J S. On a compressed spatial elastica constrained inside a tube[J]. Acta mechanica,2013,224(11):2635-2647.

(编辑 李坤璐)